

Code No. **35-NS**

Total No. of Questions : 38]

[Total No. of Printed Pages : 15

July, 2007

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

(New Syllabus)

Time : 3 Hours]

[Max. Marks : 90

(Kannada Version)

- ಸೂಚನೆ: i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C** ಮತ್ತು **D** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ - A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1. $3^{127} \equiv x \pmod{10}$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, AB ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $(G, *)$ ಸಮುದಾಯದಲ್ಲಿ, $a * x = e \forall a \in G$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

4. $(j-3k) \times (i-j+2k)$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $(0, 0), (3, 0), (0, 5)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $(y-2)^2 = -8x$ ಪರವಲಯದ ಶೃಂಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = 0$ ಆದರೆ, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
8. $2t - 4$ ರ ಕೋನಾಂಕವನ್ನು (Amplitude) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. $y = 3^{-x}$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 2 = 20

11. $a \equiv b \pmod{m}$ ಮತ್ತು $n/m \forall n \in I$ ಆದಾಗ, $a \equiv b \pmod{n}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12.
$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \cos^2 x & \sin^2 x & 1 \\ -10 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$
 ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿಲ್ಲದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ \mathcal{Q}^+ ಮೇಲೆ * ಯನ್ನು $a * b = \frac{2ab}{3} \forall a, b \in \mathcal{Q}^+$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ

a) ಏಕದ ಸಂಖ್ಯೆ (ತತ್ಸಮಕ ಅವಯವ)

b) a ಯ ವಿಶೇಷವನ್ನು * ಅಧೀನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಯಾವುದೇ ಸದಿಶ \vec{a} ಗಾಗಿ

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot i) i + (\vec{a} \cdot j) j + (\vec{a} \cdot k) k \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

15. $x^2 + y^2 - 8x = 0$ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $3x^2 + 3y^2 = 7$ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $(2, -2)$ ಮತ್ತು $(2, 4)$ ಬಿಂದುಗಳು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ತೃಂಗಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದರ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದು ಹಾಗೂ ಮುಖ್ಯ ಅಕ್ಷದ (Major axis) ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ ಆದರೆ, $xy = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. $x = \text{cis } \alpha$ ಮತ್ತು $y = \text{cis } \beta$ ಆದಾಗ,

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2i} \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

[Turn over

19. $y \log_e x = y - x$ ಆದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \log_e x}{(1 - \log_e x)^2} \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

20. x^x ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = \frac{1}{e}$ ಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ (Minimum) ವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21. $\int \frac{1}{5e^{3x} + 1} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $x^2 + y^2 + 2ky = 0$ ಯನ್ನು ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ವಿಭಾಗ - C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

23. a) 48 ಮತ್ತು 18 ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. (G.C.D.) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $6 = 48m + 18n$

ಆದರೆ, m ಹಾಗೂ n ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3

b) $51x \equiv 32 \pmod{7}$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

$$24. \begin{bmatrix} 7 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ ಆದಾಗ,}$$

ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, x, y, z ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5

25. $G = \{ \dots 5^{-2}, 5^{-1}, 5^0, 5^1, 5^2, \dots \}$ ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಬೀಲಿಯನ್ ಸಮುದಾಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

26. a) $l-j+2k$, $2j+k$, $j+3k$ ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, C ಗಳ ಸ್ಥಾನೀಯ ಸದಿಶಗಳಾದರೆ, ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 5 = 10$

27. a) $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು

$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ ವೃತ್ತಗಳು ಲಂಬವಾಗಿ ಭೇದಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಲ್ಲಿ ಬೇಕಾಗುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ರೇಖೆ $x - 2y + 6 = 0$ ಆಗಿದ್ದು, ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವು $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 22 = 0$ ಆಗಿದೆ. $(1, 6)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ವೃತ್ತವು ಹಾದುಹೋದಾಗ ಈ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$ ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $y^2 = 4ax$ ಪರವಲಯದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಯಾವುದೇ (x, y) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನಾಭಿ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a) $\tan \left\{ \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) + \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \right\} = \frac{2x}{1-x^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $\tan m\theta = \tan n\theta$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

30. a) x ನ್ನು ಕುರಿತು $\operatorname{cosec} 4x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ವಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $y = \tan^{-1} \left[\frac{2+5 \tan x}{5-2 \tan x} \right]$ ಆದಾಗ, $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

31. a) $y = [x + \sqrt{1+x^2}]^m$ ಆದಾಗ,

$(1+x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - m^2y = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) $(1, -2)$ ಹಾಗೂ $(2, -5)$ ಬಿಂದುಗಳು ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, $y = x^3 - 3x$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

32. a) ಒತ್ತುವ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಶಾಯಿ (Ink) ಯನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ t ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ r ಸಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿದ್ದಾಗ, ವೃತ್ತಾಕಾರವಾಗಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು $r = 2t^2 - \frac{t^3}{4}$ ಆದರೆ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ವೇಗದ ಗತಿಯನ್ನು, $t = 2$ ಸೆಕೆಂಡ್ ಆದಾಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $u' = \frac{du}{dx}$ ಮತ್ತು $v' = \frac{dv}{dx}$ ಎಂದಾಗಿರುವಾಗ,

$\int uv' dx = uv - \int vu' dx$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

33. a) $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x-4x^2}} dx$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. $y^2 = 4ax$ ಮತ್ತು $x^2 = 4ay$ ಪರವಲಯಗಳ ನಡುವೆ ಆವರಿಸುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

2 × 10 = 20

35. a) ಅತಿಪರವಲಯದ ನಿರ್ದೇಶಕ ವೃತ್ತದ (Director circle of a hyperbola) ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಕೊಡಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು (Equation of director circle of the hyperbola) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು,

$adj [A(x)]$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ $adj [A(x)] = A(-x)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

36. a) $(\sqrt{3} - i)^3$ ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚತುರ್ಥಾತ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅವುಗಳನ್ನು ಆವರಿತ ಗುಣಲಬ್ಧ (Continued product) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ ಎಂದು ಸದಿಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿ. 4

[Turn over

37. a) a ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ಗೋಳದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಗಾತ್ರದ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರವು $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಹಾಗೂ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) $\sec x - \tan x + \sqrt{3} = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

38. a) $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$\frac{dy}{dx} = \tan^2 (x + y)$$

(English Version)

- Instructions :** i) The question paper has **four Parts - A, B, C and D**. Answer all the parts.
- ii) **Part - A** carries 10 marks, **Part - B** carries 20 marks, **Part - C** carries 40 marks and **Part - D** carries 20 marks.

PART - A

Answer all the ten questions :

10 × 1 = 10

1. If $3^{127} \equiv x \pmod{10}$, find x .
2. If $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, find AB .
3. In a group $(G, *)$, if $a * x = e \forall a \in G$, find x .
4. Find the value of $(j - 3k) \times (i - j + 2k)$.
5. Find the centre of the circle passing through $(0, 0)$, $(3, 0)$ and $(0, 5)$.
6. Find the vertex of parabola $(y - 2)^2 = -8x$.
7. If $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = 0$, prove that $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
8. Find amplitude of $2t - 4$.
9. If $y = 3^{-x}$, find $\frac{dy}{dx}$.
10. Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$.

[Turn over

PART - BAnswer any *ten* questions : $10 \times 2 = 20$

11. If $a \equiv b \pmod{m}$ and $n|m \forall n \in I$, prove that $a \equiv b \pmod{n}$.

12. Without expansion, find the value of

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \cos^2 x & \sin^2 x & 1 \\ -10 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

13. If \mathbb{Q}^+ is the set of all positive rationals w.r.t. $*$.

define $a * b = \frac{2ab}{3} \forall a, b \in \mathbb{Q}^+$. Find

a) Identity element.

b) Inverse of a under $*$.

14. For any vector \vec{a} , prove that

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot i) i + (\vec{a} \cdot j) j + (\vec{a} \cdot k) k.$$

15. Find the length of tangent from the centre of circle $x^2 + y^2 - 8x = 0$ to the circle $3x^2 + 3y^2 = 7$.

16. Find the centre of ellipse whose vertices are $(2, -2)$ and $(2, 4)$. Also find the length of major axis.

17. If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2}$, prove that $xy = 1$.

18. If $x = \csc \alpha$ and $y = \csc \beta$,

prove that $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2i} \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right)$.

19. If $y \log_e x = y - x$, prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \log_e x}{(1 - \log_e x)^2}$$

20. Prove that x^x is minimum at $x = \frac{1}{e}$.

21. Evaluate: $\int \frac{1}{5e^{3x} + 1} dx$.

22. Form a differential equation for the equation $x^2 + y^2 + 2ky = 0$.

PART - C

I. Answer any three questions :

3 × 5 = 15

23. a) Find the G.C.D. of 48 and 18. If $6 = 48m + 18n$, find

m and n .

3

b) Solve $51x \equiv 32 \pmod{7}$. Write the solution set.

2

24. If

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

find x , y and z using Cramer's Rule.

5

[Turn over

25. Prove that the set $G = \{ \dots\dots\dots 5^{-2}, 5^{-1}, 5^0, 5^1, 5^2, \dots\dots\dots \}$ is an Abelian group under usual multiplication. 5

26. a) Find the area of the triangle ABC where position vectors of A, B, C are $i - j + 2k, 2j + k, j + 3k$ respectively. 3

b) Prove that

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}. \quad 2$$

II. Answer any two questions : 2 × 5 = 10

27. a) Obtain the condition for two circles

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$$

to intersect orthogonally. 3

b) The radical axis of two circles is $x - 2y + 6 = 0$. The equation of one of the circles is $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 22 = 0$. If the second circle passes through the point $(1, 6)$, find its equation. 2

28. a) Find the centre and the foci of ellipse

$$4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0. \quad 3$$

b) Find the focal distance of any point (x, y) on the parabola $y^2 = 4ax$. 2

29. a) Prove that

$$\tan \left\{ \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) + \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \right\} = \frac{2x}{1-x^2}. \quad 3$$

b) Find the general solution of

$$\tan m\theta = \tan n\theta. \quad 2$$

III. Answer any three of the following questions :

3 × 5 = 15

30. a) Differentiate cosec 4x with respect to x from first principles. 3

b) If $y = \tan^{-1} \left[\frac{2+5 \tan x}{5-2 \tan x} \right]$, find $\frac{dy}{dx}$. 2

31. a) If $y = [x + \sqrt{1+x^2}]^m$, prove that

$$(1+x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0. \quad 3$$

b) Find a point on the curve $y = x^3 - 3x$, where tangent is parallel to the line joining the points (1, -2) and (2, -5). 2

32. a) A circular blot of ink in a blotting paper increases in area in such a way that the radius r cm at time t seconds is given by $r = 2t^2 - \frac{t^3}{4}$. Find the rate of increase of area when $t = 2$. 3

[Turn over

b) Prove that $\int uw' dx = uv - \int vu' dx$

where $u' = \frac{du}{dx}$ and $v' = \frac{dv}{dx}$.

33. a) Evaluate : $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

b) Evaluate : $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x-4x^2}} dx$.

34. Find the area enclosed between the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

PART - D

Answer any two of the following questions :

2 × 10 = 20

35. a) Define director circle of a hyperbola. Derive the equation of director circle of the hyperbola.

b) Using $A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

find $\text{adj}[A(x)]$. Prove that $\text{adj}[A(x)] = A(-x)$.

36. a) Find the fourth roots of $(\sqrt{3} - i)^3$. Also find their continued product.

- b) Prove by vector method,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

4

37. a) Show that the height of a right circular cylinder of the greatest volume which is inscribed in a sphere of radius a is $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Find the radius of the right circular cylinder.

6

- b) Find the general solution of

$$\sec x - \tan x + \sqrt{3} = 0$$

4

38. a) Prove that $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$.

6

- b) Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \tan^2(x + y)$$

4